Итоговая контрольная работа

Задача1. Найти остаток от деления многочлена $2x^5 + x^4 - 6x^2 + 5x$ на многочлен $x – 1$

Ответ: Делим первый элемент делимого на старший элемент делителя, помещаем результат под чертой:

$2x^5 + x^4 - 6x^2 + 5x$	$x - 1$
$2x^5 - 2x^4$	$2x^4$
$3x^4 - 6x^2 + 5x$	

$2x^5 + x^4 - 6x^2 + 5x$	$x - 1$
$2x^5 - 2x^4$	$2x^4 + 3x^3$
$3x^4 - 6x^2 + 5x$	
$3x^4 - 3x^3$	
$3x^3 - 6x^2 + 5x$	

$2x^5 + x^4 - 6x^2 + 5x$	$x - 1$
$2x^5 - 2x^4$	$2x^4 + 3x^3 + 3x^2$
$3x^4 - 6x^2 + 5x$	
$3x^4 - 3x^3$	
$3x^3 - 6x^2 + 5x$	
$3x^3 - 3x^2$	
$- 3x^2 + 5x$	

$2x^5 + x^4 - 6x^2 + 5x$	$x - 1$
$2x^5 - 2x^4$	$2x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 3x$
$3x^4 - 6x^2 + 5x$	
$3x^4 - 3x^3$	
$3x^3 - 6x^2 + 5x$	
$3x^3 - 3x^2$	
$- 3x^2 + 5x$	
$- 3x^2 + 3x$	
$2x$	

$2x^5 + x^4 - 6x^2 + 5x$	$x - 1$
$2x^5 - 2x^4$	$2x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$
$3x^4 - 6x^2 + 5x$	
$3x^4 - 3x^3$	
$3x^3 - 6x^2 + 5x$	
$3x^3 - 3x^2$	
$- 3x^2 + 5x$	
$- 3x^2 + 3x$	
$2x$	
$2x - 2$	
2	

Ответ: Остаток = 2

Задача 2. Используя формулы Муавра найти все корни $\sqrt[3]{-27}$, и записать их в алгебраической форме

$$-27=-27+0\cdot i=27(-1+0\cdot i)=27(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

$$\begin{cases}\cos\varphi=-1\\ \sin\varphi=0\end{cases}\Rightarrow\varphi=\pi+2\pi k$$

$$-27=27\left[\cos\left(\pi+2^{\pi}k\right)+i\sin(\pi+2\pi k)\right]$$

$\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)$. Берём $k\in\{0,1,2\}$

$$z_0=3\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot0}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot0}{3}\right)=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_1=3\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot1}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot1}{3}\right)=3(\cos\pi+i\sin\pi)=3(-1+0\cdot i)=-3$$

$$z_2=3\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot2}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot2}{3}\right)=3\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

При этом $z_0^3=z_1^3=z_2^3=-27$

Задача 3. Найти матрицу, обратную матрице $\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&5&1\end{pmatrix}$

Ответ: Для вычисления обратной матрицы запишем данную матрицу, дописав к ней справа единичную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&5&1&0&0&1\end{array}\right)$$

Теперь, что бы найти обратную матрицу, используя элементарные преобразования над строками матрицы, преобразуем левую часть полученной матрицы в единичную. К 1 строке добавляем вторую строку, умноженную на 3, от 3 строки отнимаем вторую строку, умноженную на 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&-5&1\end{array}\right)$$

Ответ: $\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{pmatrix}$

Задача 4. Найти каноническое уравнение прямой, проходящей через точку A(1, 2, 3) и перпендикулярную плоскости с общим уравнением 5x – 3y – 12z – 7 = 0

Ответ : Общее уравнение плоскости имеет вид:

Ax+By+Cz+D=0

где n(A,B,C)− называется нормальным вектором плоскости.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющий направляющий вектор $q(l, m, n)$ имеет следующий вид:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

Для того, чтобы прямая была ортогональна плоскости, направляющий вектор $q(l, m, n)$ прямой должен быть коллинеарным нормальному вектору $n(A,B,C)$ плоскости. Следовательно, в качестве направляющего вектора прямой можно взять нормальный вектор плоскости

Таким образом, уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$и ортогональный плоскости имеет следующий вид:

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$

Подставляя координаты точки и координаты нормального вектора плоскости в (3), получим:

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{12}$$

Ответ: Каноническое уравнение прямой: $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{12}$

Задача 5. Решить СЛАУ $\begin{cases} x+2y-2=3 \\ 3x-y+z=2 \\ 2x-3y+2z=-1 \end{cases}$

Ответ : Перепишем систему уравнений в матричном виде и решим методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

От 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 3. От 3 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \end{array}\right)$$

2 строку делим на -7:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{7} & 1 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \end{array}\right)$$

От 1 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 2. К 3 строке добавляем 2 строку, умноженную на 7:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{1}{7} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ответ: Система имеет множество решений:

$$\begin{cases} x_1+\frac{1}{7}x_3=1 \\ x_2-\frac{4}{7}x_3=1 \end{cases}$$

Задача 6. Найти канонический вид квадратичной формы $F(x,y)=x^2+12^x y+y^2$

Ответ : Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 6 & 1-\lambda \end{bmatrix}=0$$

$(1-\lambda)^2-36=0$

$(1-\lambda-6)(1-\lambda-6)=0$

$(-5-\lambda)(7-\lambda)=0$

$\lambda_1=-5$; $\lambda_2=7$

$F(x,y)=-5x^2+7y^2$

Ответ: $-5x^2+7y^2$